Instituto Nacional de Metrología de Colombia

Simposio de Metrología

SIMPOSIO DE METROLOGÍA 2014

20 ANIVERSARIO CENAM
EN BENEFICIO DE LA NACIÓN

SIMULACIÓN DE LA SUPERPOSICIÓN DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD RECTANGULARES SIMÉTRICAS COMO APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

Nelson Bahamón C., Alexander Martínez L.
Instituto Nacional de Metrología de Colombia (INM)
Bogotá D.C., Colombia
(57) (1) 2 54 22 22 nbahamon@inm.gov.co, amartinez@inm.gov.co

Resumen: **La importancia del teorema del límite central en metrología es inmediata, por lo cual la comprensión del mismo es fundamental para quien se está formando en este campo. Un ejemplo sencillo y llamativo que permite aproximarse en forma natural a este concepto, es la superposición de las distribuciones de probabilidad generadas con dados. Se hizo una aplicación en la que se simula dicha superposición y se puede visualizar el resultado de forma clara y pudiendo cambiar fácilmente algunos parámetros. La simulación ha sido útil y exitosa al ser usada por estudiantes y metrólogos del INM.**

1. INTRODUCCIÓN.

El propósito de este trabajo es facilitar el estudio y comprensión del concepto del teorema del límite central y su aplicación en metrología, especialmente por personas que no tienen una sólida formación en matemáticas y estadística.

Por lo general, al hacer la estimación de incertidumbres en una medición, se está aplicando implícita o explícitamente, el teorema del límite central, por considerar que la distribución de salida es aproximadamente Normal. La GUM (Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement) trata la importancia de este teorema, especialmente en el numeral G2.

Se simuló la superposición de las distribuciones de probabilidad resultantes asociadas al lanzamiento simultáneo de varios dados. La aplicación se hizo en Excel ®.

2. TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL.

Parte del problema en estimación de incertidumbres en metrología, consiste en encontrar un factor k, de cobertura, adecuado para obtener la incertidumbre expandida que determinará un intervalo entorno al valor estimado de Y (el mensurando), con un cierto nivel de confianza. Para esto es muy importante conocer la distribución de probabilidad de salida de Y que a su vez dependerá de las distribuciones de probabilidad de las diferentes variables X_i de entrada. Esto se puede hacer mediante la convolución de las variables X_i si se cumplen dos condiciones:

- Que se conozcan las distribuciones de probabilidad de las variables X_i
- Que Y dependa linealmente de las variables de entrada.

Además de lo complejo que puede resultar hacer dicha convolución, las condiciones anteriores, por lo general, no se cumplen.

Entonces, lo habitual es recurrir al teorema del límite central que establece que la distribución de Y es aproximadamente Normal, si se cumplen las siguientes condiciones:

- Que las variables de entrada sean independientes entre si.
- Que ninguna de las variables de entrada con distribución diferente a la Normal, sea dominante.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

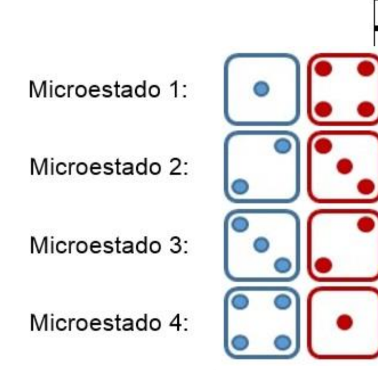
En la figura 3 se muestran algunos de los resultados.

Para el caso de un dado se nota un comportamiento disperso con pocas medidas (lanzamientos de los dados), pero al aumentar las mismas se tiene que la distribución es claramente rectangular. Esto concuerda con lo que se espera teóricamente, ya que cada cara del dado tiene la misma probabilidad (1/6), de ser el resultado de un lanzamiento. También se puede notar que se cumple lo que se conoce en estadística como la "ley de los números grandes", según la cual entre mayor sea el número de datos o medidas, el comportamiento experimental se ajusta mejor el modelo teórico que lo describe.

En forma muy gráfica, puede verse que se cumple el teorema del límite central. Para tres dados o más se observa que la distribución de salida tiene un comportamiento muy aproximado a una distribución Normal. Entonces, con tres dados o mas, la convolución de distribuciones rectangulares da como resultado una distribución aproximadamente Normal.

Que se cumpla el teorema del límite central en una estimación específica de incertidumbres simplifica notoriamente las cosas. La determinación del factor k de cobertura se hace sencilla porque este es bien conocido para una curva gaussiana o en su defecto, t de Student si hay pocos datos.

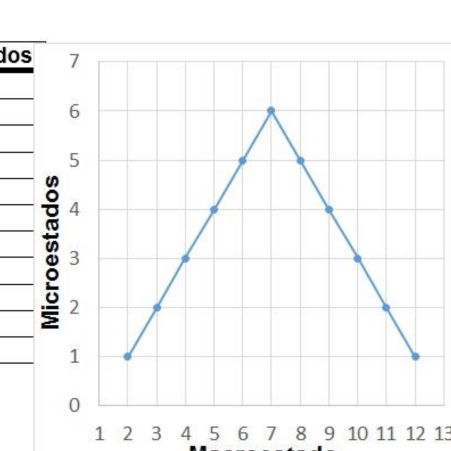
El caso de dos dados es particularmente llamativo ya que la distribución de salida tiende a ser triangular. El resultado de la simulación coincide con el teórico. La demostración es simple, basta con analizar el número de microestados asociados a cada estado o macroestado resultante. Esto se ilustra en la siguiente figura:



a)

Macroestado	Microestados
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

b)



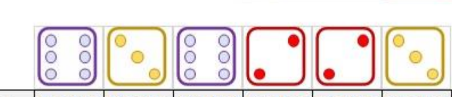
c)

Figura 1. a) Microestados asociados al valor (macroestado) 5. b) Número de microestados asociados a todos los valores posibles con 2 dados y c) Distribución de probabilidad teórica para el caso de 2 dados.

4. CONCLUSIÓN.

Se hizo una simulación que ilustra didácticamente el teorema del límite central. Como se comprobó con estudiantes, la simulación es de gran utilidad para comprender este concepto y su papel dentro del proceso de estimación de incertidumbres.

Medidas:	10	2-10000	Mínimo:	6		Promedio:	18,8
# Dados:	6	1 - 6	Máximo:	36		DesEstandar:	4,42
			No. Inter:	31		Varianza:	19,5



n	Dado1	Dado2	Dado3	Dado4	Dado5	Dado6	Suma	Inter	Histo
1	6	3	6	2	2	3	22	6	0
2	1	2	5	4	2	1	15	7	0

a)

b)

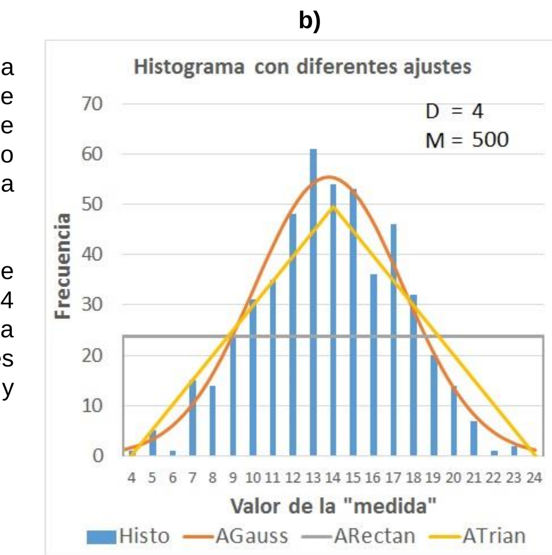


Figura 2. a) Aspecto parcial del programa de cómputo. Los parámetros que se pueden modificar son el número de dados (D) y el de medidas (M) o lanzamientos. La simulación se vuelve a ejecutar cada vez que se oprime F9.

Figura 2. b). Ejemplo del resultado de ejecutar la simulación para el caso D = 4 y M = 500. Aparece el histograma resultante con los ajustes a tres distribuciones (gaussiana, rectangular y triangular)

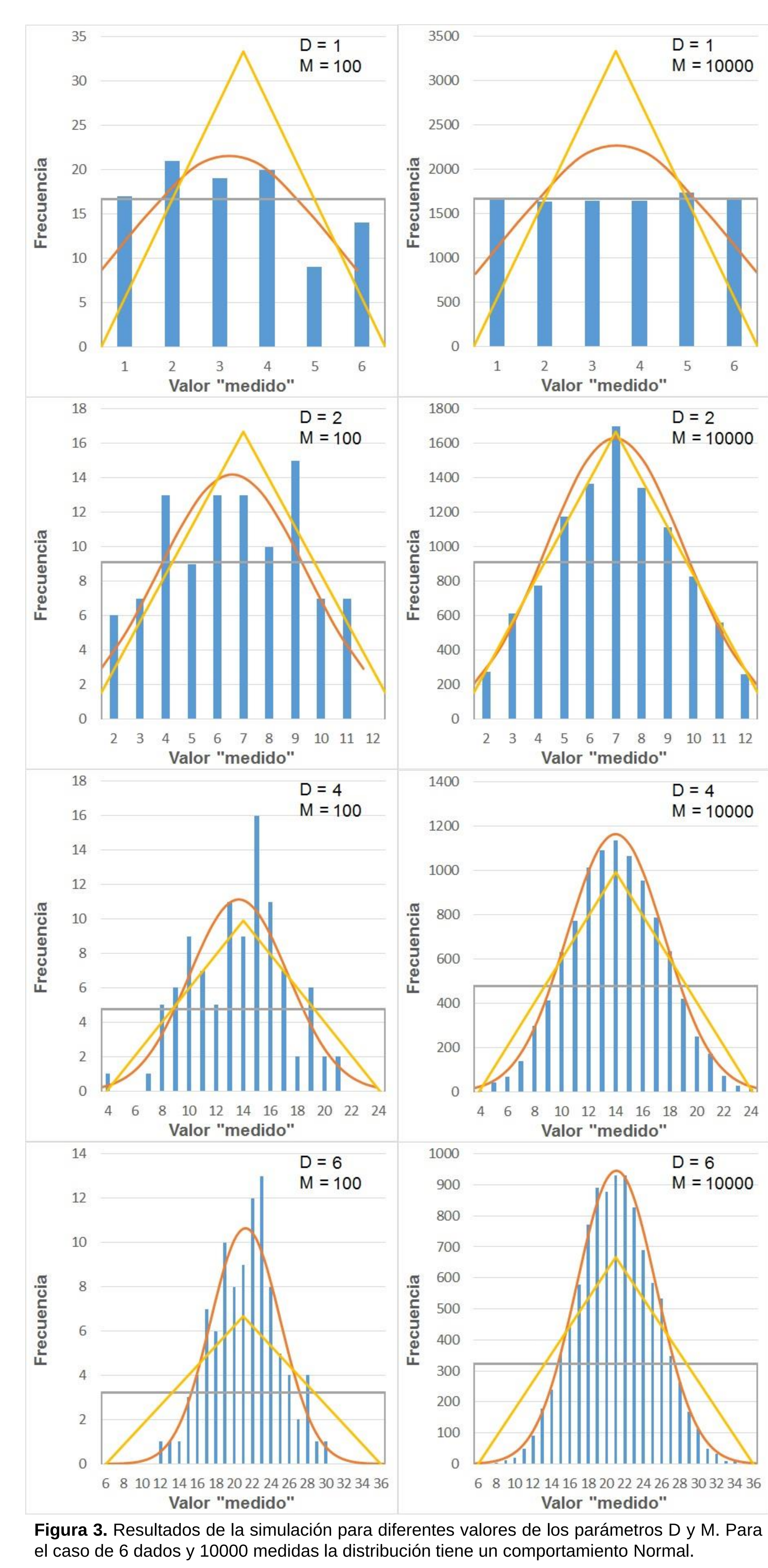


Figura 3. Resultados de la simulación para diferentes valores de los parámetros D y M. Para el caso de 6 dados y 10000 medidas la distribución tiene un comportamiento Normal.